|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Questionnaire**  **examen final**  **MTH6415**  **Sigle du cours** |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***Identification de l’étudiant(e)*** | | | | | | | | | |
| **Nom :** | | | | | **Prénom :** | | | | |
| **Signature :** | | | | | **Matricule :** | | | | **Groupe :** |
|  | | | | | | | | | |
| ***Sigle et titre du cours*** | | | | ***Groupe*** | | | | ***Trimestre*** | |
| **MTH6415**  **Optimisation stochastique** | | | | **TOUS** | | | | **HIVER 2016** | |
| ***Professeur*** | | | | ***Local*** | | | | ***Téléphone*** | |
| **Michel GENDREAU** | | | | **B-311** | | | | **4513** | |
| ***Jour*** | | ***Date*** | | | | ***Durée*** | | ***Heures*** | |
| **Mercredi** | | **26 avril 2017** | | | | **2h30** | | **9h30 à 12h00** | |
| ***Documentation*** | | | ***Calculatrice*** | | | | | | |
| Aucune | | | Aucune | | | | **Les cellulaires, agendas électroniques ou téléavertisseurs sont interdits.** | | |
| Toute | | | Toutes | | | |  | | |
| Voir directives particulières | | | Non programmable | | | |  | | |
| ***Directives particulières*** | | | | | | | | | |
| * **Barème : 100 (40% de la note finale du cours)**   *Bonne chance à tous!* | | | | | | | | | |
| ***Important*** | Cet examen contient **x5** questions sur un total de **x3**  pages  **(excluant cette page)** | | | | | | | | |
|  | La pondération de cet examen est de **40**  **%** | | | | | | | | |
|  | Vous devez répondre sur :  le questionnaire  le cahier  les deux | | | | | | | | |
|  | Vous devez remettre le questionnaire :  oui  non | | | | | | | | |

**L’étudiant doit honorer l’engagement pris lors de la signature du code de conduite**.

**Problème #1** (10 points)

On considère un programme dynamique en horizon infini dans lequel l’ensemble des états est *X*= {1, 2). L’ensemble des décisions admissibles pour ces deux états est identique; il est dénoté *U* = {*u*1, *u*2}. Les matrices de transition associées aux décisions *u*1 et *u*2 sont respectivement

et .

Les coûts associés à *u*1 et *u*2 sont donnés par les vecteurs

et .

On souhaite minimiser le coût espéré total actualisé sur horizon infini**.** Le facteur d’actualisation est

1. À partir du vecteur initial exécuter une itération de la méthode d’itération de valeurs.
2. En appliquant la méthode d’itération de politiques à partir de la politique, déterminer la politique optimale *µ\** et le vecteur de coût espéré optimal *J\**.

**Problème #2** (30 points)

Tom Léveillé, un touriste intrépide a décidé d’aller visiter une région reculée de l’ouest des États-Unis avec sa nouvelle voiture électrique. Alors qu’il prépare son voyage, Tom se rend compte qu’il y a relativement peu de stations de recharge pour véhicules électriques dans cette région. En fait, seules quelques villes en possèdent. Durant son voyage, Tom, qui amorcera son périple à Nowhere Canyon, passera successivement à côté des villes ***V*1**à ***V*9** (je vous évite les noms!) pour finalement aboutir à Las Vegas d’où il pourra continuer son voyage sans se préoccuper de problèmes de recharge. Malgré une étude fouillée du trajet à réaliser, Tom n’a pas pu estimer très précisément sa consommation d’énergie entre les diverses villes. Si on exprime la consommation d’énergie en pourcentage de la capacité de la batterie de son véhicule, Tom estime que l’énergie consommée pour aller de la ville ***Vi*** à la ville ***Vi+*1** sera donnée par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme discrète sur l’intervalle [***ai***, ***bi***], avec ***ai >*** 0 et ***bi*** < 100 (notes : Nowhere Canyon correspond à la ville ***V*0** et Las Vegas à ***V*10**). Tom ne se préoccupe pas du prix à payer dans chaque ville pour faire la recharge de son véhicule, mais il est un touriste impatient qui déteste perdre du temps pour rien. Il veut donc minimiser le temps qu’il consacrera à des arrêts pour recharge. Chaque fois qu’il s’arrêtera sa politique consiste à recharger complètement sa batterie. On peut supposer que le temps de recharge (en minutes) dans la ville ***Vi*** est égal à un facteur ***αi*** multiplié par le pourcentage de la capacité de la batterie à recharger. Ce qui énerve le plus Tom, c’est qu’il faut parfois attendre assez longtemps avant d’avoir accès à une borne de recharge. Il estime que, pour la station de recharge de la ville ***Vi***, le temps d’attente à la station (exprimé en minutes) est à toutes fins pratiques nul avec probabilité ***pi*** et que sinonil suit une loi uniforme discrète sur l’intervalle [***ci***, ***di***], avec ***ci >*** 0, pour chaque ***i*** = 0,…9.

Remarques importantes :

* Tom doit s’assurer de ne jamais tomber en panne durant son trajet. On suppose qu’en arrivant à Nowhere Canyon sera à 80% déchargée.
* On suppose que tout arrêt pour recharge implique un temps fixe de ***T*** minutes, en sus du temps de recharge proprement dit et d’un éventuel temps d’attente.
* On peut supposer que les consommations d’énergie entre les villes et les temps d’attente aux stations dans les différentes villes sont des variables aléatoires indépendantes.
* Tom n’aura pas besoin de recharger son véhicule en arrivant à Las Vegas ; il pourra le faire sans encombre pendant la nuit dans l’hôtel qu’il y a réservé.

1. (20 points) Sachant que Tom ne peut observer l’achalandage d’une station de recharge avant de décider de s’arrêter et que s’il s’arrête dans une ville, il rechargera toujours sa batterie au maximum, formuler un modèle de programmation dynamique qui permettra à celui-ci de minimiser l'espérance du temps total consacré à recharger son véhicule durant son périple. Préciser très clairement tous les éléments du modèle.
2. (10 points) Supposons maintenant qu’en arrivant à une station de recharge, Tom puisse décider, s’il faut attendre, de ne pas procéder à la recharge et de reprendre la route immédiatement (note : il aura quand même à encourir un temps fixe de ***T*** minutes, mais il n’aura pas à attendre). Comment faudrait-il modifier le modèle précédent pour aider Tom, en n’oubliant pas qu’il ne doit jamais tomber en panne ?

**Problème #3** (10 points)

Considérer le programme de seconde étape

*Q*(*x*, ξ) = min {*y* | *y* ≥ ξ, *y* ≥ *x*} avec *x ≥* 0.

Supposons que la densité de ξ est donnée par *f*(ξ) = 2/ ξ3, ξ ≥ 1.

Que peut-on dire de *K*2*P* et *K*2 ?

**Problème #4** (10 points)

On considère un programme stochastique en deux étapes dont le domaine réalisable de 1ère étape est Pour la seconde étape, on a deux scénarios équiprobables. Le domaine réalisable pour le premier scénario est

et celui pour le second scénario est

On veut minimiser la fonction objectif

1. Trouver la solution optimale de ce problème (il suffit d’énumérer les solutions réalisables du problème de première étape).
2. Calculer la valeur de l'information parfaite et celle de la solution stochastique.

**Problème #5** (40 points)

Le gestionnaire du centre d’appels d’une grande entreprise doit préparer les horaires de travail de ses employés pour le prochain mois (30 journées). À chaque jour, le centre reçoit un grand d’appels de nature diverse, mais qui sont traités par le même groupe d’employés. Le nombre d’appels varie chaque jour de façon aléatoire, mais on peut estimer la distribution de celui-ci à partir d’informations historiques. Ainsi, pour chaque journée du mois à venir, on peut définir une variable aléatoire qui correspond au nombre d’appels reçus le jour *j*. On dénote par *Fj* la fonction cumulative de la loi de probabilité régissant . Par ailleurs, l’expérience passée montre que, pour *j* ≠ *j’*, on peut considérer et comme des variables aléatoires indépendantes.

La durée de chaque appel traité par un employé du centre varie en pratique, mais pour des fins de planification, on peut supposer qu’un employé qui travaille une certaine journée peut traiter de façon efficace jusqu’à *β* appels durant son quart de travail. C’est donc dire que si *nj* employés travaillent le jour *j*, ils pourront collectivement traiter de façon efficace jusqu’à *β nj* appels.

1. (20 points) Supposons dans un premier temps que le gestionnaire doit répartir entre les 30 journées du mois à venir un total de *N* personnes-journées de travail avec comme seule contrainte le fait qu’il ne peut affecter à n’importe quelle journée plus de employés, correspondant à la taille du groupe d’employés à sa disposition. Le gestionnaire souhaite minimiser l’espérance du nombre total d’appels qui n’auront pas été traités efficacement durant le mois. Proposer un modèle de programmation stochastique qui permettra au gestionnaire d’allouer optimalement ses employés durant le prochain mois. Préciser clairement tous les éléments du modèle.
2. (10 points) Supposons maintenant qu’en plus des *N* personnes-journées de travail de ses employés réguliers, le gestionnaire à accès à un groupe d’employés à temps partiel, à toute fin pratique infini, qu’il peut allouer aux journées du mois à venir, avec pour seule contrainte que le nombre d’employés travaillant à chaque jour ne peut dépasser le nombre de postes de travail dont l’entreprise dispose dans le centre d’appels. Une journée de travail d’un employé à temps partiel coûte *C*. On estime que le coût d’un appel qui n’est pas traité efficacement est égal à *γ*. Le gestionnaire souhaite minimiser l’espérance du coût total associé à l’embauche d’employés à temps partiel et aux appels qui n’auront pas été traités efficacement. Modifier le programme proposé en (a) pour résoudre ce problème.
3. (10 points) La haute direction de l’entreprise trouve que les employés réguliers coûtent trop cher et décide de les licencier pour ne plus fonctionner qu’avec des employés à temps partiel. il est trivial de modifier le modèle proposé en (b) pour traiter ce cas (il suffit de faire disparaître tous les éléments correspondants aux employés réguliers). Si l’on néglige le fait que le nombre d’employés affectés à chaque jour doit être entier, pensez-vous qu’il est facile de déterminer le nombre optimal d’employés à affecter à chaque journée? Justifier votre réponse.

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**